سلاسل فورييه:

1 المتطلبات:

تعريف: نقول عن التابع $f: R \longrightarrow R$ إنه دوري
دوره $T \neq 0$ إذا كان:

$$f(x+T) = f(x) \ , \ \forall x \in R$$

ملاحظة: إذا كان f تابع دوري ودوره T وكان $c \neq 0$
فإن $f(cx)$ تابع دوري ودوره T/c.

ملاحظة:
إذا كان f تابع دوري ودوره T وقابل للمكاملة على المجال $[0,T]$
عندئذٍ:

$$\int_{c}^{c+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

حيث c عدد حقيقي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx - \int_{4\pi}^{6\pi} \sin x\,dx$$

بـ ن:

$$\int_{c}^{c+T} f(x)\,dx = \int_{c}^{0} + \int_{0}^{T} + \int_{T}^{c+T} \quad \star$$

لنأخذ

$$\int_{T}^{c+T} f(x)\,dx$$

نفرض $x = s+T \Leftarrow dx = ds$

$$\int_{T}^{c+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{s} f(s+T)\,ds$$

$$= \int_{0}^{c} f(s)\,ds - \int_{c}^{0} f(s)\,ds$$

نعوض في $\star$

$$\int_{c}^{c+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

العلاقة صحيحة

الموضوع :

ملاحظة :

إذا كان f تابع معرف على المجال $[a, a+T[$

عندئذ يمكن تمديد التابع f إلى تابع دوري عدده T معرف على R.

نحتاج إلى بعض التكاملات الأساسية :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \quad , n \in IN$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cdot\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cdot\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & , k \neq n \\ \pi & ; k = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \quad ; k, n \in IN$$

تنتج التكاملات باستخدام العلاقات التالية :

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

ملاحظات : [1] إذا كان f فردي فإن $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$

[2] " " " زوجي " $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{c} f(x)\,dx$

[3] جداء تابعين فرديين تابع زوجي.

" " زوجيين " " .

" " فردي و زوجي " فردي.

الموضوع :

2 السلسلة المثلثية :

نسمي السلسلة التالية :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

سلسلة مثلثية ونسمي a_0, b_n, a_n توابع السلسلة.

(إذا كانت السلسلة متقاربة فإن تابع المجموع دوري ودوره 2π)

مسألة: إذا كان f تابع دوري ودوره 2π هل يمكن تمثيل التابع f لسلسلة مثلثية وما هي العوامل a_0, a_n, b_n.

- لنفرض أن السلسلة المثلثية تتقارب بإنتظام على R من التابع f.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

يمكن مكاملة السلسلة حداً حداً على المجال $[-\pi, \pi]$ نحصل على :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

بما أن f قابل للمكاملة على $[-\pi, \pi]$ فإن $f(x) = \cos(kx)$.

$f(x) = \sin(kx)$ تابع قابل للمكاملة على المجال $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)\,dx$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx)\,dx$$

الموضوع:

حيث $k \in \mathbb{N}$ مثبتة ،

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \pi a_k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad , k\geq 1$$

وبالتالي نجد :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin(kx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)\,dx\right.$$

$$\left.+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\,dx\right]$$

$$= b_k\pi$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \quad , k\geq 1$$

ملاحظة: إذا كان f تابع يملك عدد منتهي من نقاط الانقطاع من النوع الأول فإنه يمكننا إيجاد المكاملة والعوامل a_0, a_n, b_n

II سلاسل فورييه :

تعريف: ليكن f تابع قابل للمكاملة على $]-\pi, \pi[$ ، إن العوامل :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad , n\geq 1 \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad n\geq 1 \end{cases}$$

تسمى عوامل فورييه للتابع f وتسمى السلسلة التالية

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

سلسلة فورييه للتابع f